HAL open science

Un scindage de l'application de Frobenius sur toute l'algèbre des distributions de SL_2

Michel Gros

▶ To cite this version:

Michel Gros. Un scindage de l'application de Frobenius sur toute l'algèbre des distributions de SL_2. 2007. hal-00222027

HAL Id: hal-00222027
https://hal.science/hal-00222027

Preprint submitted on 29 Jan 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Un scindage de l'application de Frobenius sur toute l'algèbre des distributions de SL_2

Michel Gros
IRMAR, UMR CNRS 6625
Université de Rennes I
Campus de Beaulieu
35042 Rennes cedex
France
e-mail : michel.gros@univ-rennes1.fr

30 janvier 2008

hal-00222027, version 1 - 29 Jan 2008

Abstract. We define, over $\mathbb{F}_p$ $(p > 2)$, a splitting of the Frobenius morphism $Fr : \mathrm{Dist}\,(G) \rightarrow \mathrm{Dist}\,(G)$ on the whole $\mathrm{Dist}\,(G)$, the algebra of distributions of the k-algebraic group $G := SL_2$. This splitting is compatible (and lifts) the theory of Frobenius descent for arithmetic $\mathcal{D}$-modules over $X := \mathbb{P}^1_k$.

0 Introduction

Soient $p > 2$ un nombre premier, $k = \mathbb{F}_p$ le corps fini à p éléments, X un k-schéma lisse et $(\mathcal{D}^{(m)}_X)_{m\in\mathbb{N}}$ le système inductif d' anneaux d' opérateurs différentiels défini par Berthelot ([1], 2. ou [3] pour un survol de toute la théorie). Si $F : X \rightarrow X'$ désigne le morphisme de Frobenius relatif attaché à cette situation, un résultat fondamental ([2], 2.3.6 et 2.4.6) est que le foncteur $F^* : (\mathcal{D}^{(m)}_{X'} - \mathrm{Mod}) \rightarrow (\mathcal{D}^{(m+1)}_X - \mathrm{Mod})$ est une équivalence de catégories. La question, non triviale, de l'explicitation locale (« descente par Frobenius »), partant d' un $\mathcal{D}^{(m+1)}_X$-module du $\mathcal{D}^{(m)}_{X'}$-module qui lui correspond a été étudiée dans [5] et un certain opérateur différentiel "projecteur"[1] $\mathcal{H}$ (cf. *loc. cit.* 2.5) joue un rôle central.

Si, d'autre part, G désigne un k-groupe réductif d'algèbre de Lie $\mathcal{G}$, l'idée, fondamentale, d'introduction des "puissances divisées partielles" dans la définition des $(\mathcal{D}^{(m)}_X)_{m\in\mathbb{N}}$ une fois appliquée à G permet de définir (cf. [9]) un système inductif d'algèbres enveloppantes $(U^{(m)}(\mathcal{G}))_{m\in\mathbb{N}}$ tel que $U^{(0)}(\mathcal{G})$ s'identifie à l'algèbre enveloppante universelle et la limite inductive des $U^{(m)}(\mathcal{G})$ s'identifie à l'algèbre des distributions $\mathrm{Dist}\,(G)$ de G. Notant $X(= \mathbb{P}^1_k)$ le k-schéma des drapeaux (complets) de G, on dispose de morphismes[2] d'anneaux $\rho_m : U^{(m)}(\mathcal{G}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{D}^{(m)}_X)$ (et d'une théorie de la localisation[3] permettant *in fine* de passer des $U^{(m)}(\mathcal{G})$-modules aux $\mathcal{D}^{(m)}_X$-modules).

Nous abordons dans ce travail, dans le cas $G = SL_2$, la question suivante : existe-t-il des variantes de la "descente par Frobenius" pour les $U^{(m)}(\mathcal{G})$-modules (ou pour certains d' entre eux) compatibles (via ρ_m) avec ce qui existe pour les $\mathcal{D}^{(m)}_X$-modules ? Le résultat principal[4] est le suivant :

Proposition (cf. Prop. 2.2.1). Il existe, pour tout $m \geq 0$ un morphisme (non unifère) d'algèbres $\varphi_m : U^{(m)}(\mathcal{G}) \rightarrow U^{(m+1)}(\mathcal{G})$ scindant le morphisme (canonique) de Frobenius $Fr : U^{(m+1)}(\mathcal{G}) \rightarrow$

[1] Nous nous écartons ici de la typographie de *loc.cit.* dans laquelle ce projecteur est noté H afin d'éviter plus bas toute confusion avec la notation standard de la base canonique de sl_2.

[2] Variante "à niveau" de [10], Prop. 6.2.3.

[3] Le résultat le plus complet concerne le cas $m = 0$ ([4]) et des résultats partiels existent pour $m > 0$ ([8]).

[4] Nous ne donnons la démonstration complète que d' un résultat un peu moins précis.

$U^{(m)}(\mathcal{G})$.

On trouve dans la littérature un scindage de Fr défini (dans cadre plus général) par Lusztig (et utilisé dans [12], 2., [11],...) seulement sur Dist $(B) \subset$ Dist (G) avec B un Borel de G et qui ne s'étend pas à Dist (G). Le caractère un peu surprenant de ce résultat est que la question de l'existence d' un relèvement (via ρ_m) de $\mathcal{H}$ au niveau des algèbres enveloppantes, harmonisant en quelque sorte [6] et [5], conduit naturellement à un scindage de Fr sur Dist (G) tout entier.

Dans la partie I, nous avons choisi, afin d'être le plus bref possible, de présenter le contexte arithmétique des opérateurs différentiels et des algèbres enveloppantes sous une forme *ad hoc* (ie. par "générateurs et relations"). Dans la partie II, après avoir établi quelques propriétés supplémentaires de la "norme" introduite dans [6], nous définissons le scindage évoqué dans la proposition ci-dessus. Que ce soit un morphisme d' algèbres est établi par une vérification reposant sur une combinaison de congruences élémentaires et sur les propriétés de la "norme". Enfin, dans la partie III, nous examinons la compatibilité de ce scindage avec l'application "canonique" de Berthelot et le projecteur $\mathcal{H}$ de Garnier.

1 Rappels

1.1 Opérateurs différentiels de niveau m

Soit X un k-schéma lisse. On renvoie à [1] et [2] pour un exposé complet des fondements "naturels" (faisceau des parties principales de niveau m,...) de la théorie des $\mathcal{D}_X^{(m)}$-modules (avec $m \in \mathbb{N}$). Pour ce dont nous aurons besoin, il suffit d'adopter la présentation suivante (cf. [8]). On filtre l' anneau des opérateurs différentiels "usuels" (ie. ceux de EGA IV) par l' ordre : $\mathcal{D}_X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{D}_X^n$ et l'on pose pour $m \geq 0$:

$\mathcal{D}_X^{(m)} := \mathbb{T}_k(\mathcal{D}_X^{2p^m-1})/(\lambda - \lambda 1_{O_X}, (D \otimes D' - D' \otimes D) - [D, D'], D \otimes D'' - DD'', \lambda \in k, D'' \in \mathcal{D}_X^{p^m-1}; D, D' \in \mathcal{D}_X^{p^m})$

avec $\mathbb{T}_k(.)$ désignant l'algèbre tensorielle sur k.

Les $(\mathcal{D}_X^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ forment de manière naturelle un système inductif dont la limite s'identifie à $\mathcal{D}_X$. Hormis lorsque $m = 0$, l' anneau $\mathcal{D}_X^{(m)}$ n'est pas engendré par les dérivations mais admet localement (contrairement à $\mathcal{D}_X$) une famille finie de générateurs sur O_X.

1.2 Algèbres enveloppantes de niveau m

Soit G un k-groupe algébrique linéaire d' algèbre de Lie $\mathcal{G}$. Ici aussi, au lieu de développer la théorie des opérateurs différentiels de niveau $m \geq 0$ invariants sur G, il est plus rapide de considérer l'algèbre Dist (G) des distributions de G (c' est à dire l'algèbre des opérateurs différentiels invariants sur G) et la filtration par l'ordre Dist $(G) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}}$ Dist $(G)_n$ et l' on pose pour $m \geq 0$ (ϵ_G désignant la co-unité de G)

$U^{(m)}(\mathcal{G}) := \mathbb{T}_k(\mathrm{Dist}\,(G)_{2p^m-1})/(\lambda - \lambda\epsilon_G, (\mu \otimes \mu' - \mu' \otimes \mu) - [\mu, \mu'], \mu" \otimes \mu - \mu"\mu, \lambda \in k, \mu'' \in \mathrm{Dist}\,(G)_{p^m}; \mu, \mu' \in \mathrm{Dist}\,(G)_{p^m-1})$

La limite inductive du système inductif naturel que forment les $(U^{(m)}(\mathcal{G}))_{m \in \mathbb{N}})$ s'identifie à Dist (G) (qu' il est commode ici d' identifier à la $\mathbb{Z}$-forme de Kostant de l'algèbre enveloppante de sl_2 réduite modulo p que nous noterons $U(\mathcal{G})$ dans la suite) et $U^{(0)}(\mathcal{G})$ n'est autre que l'algèbre enveloppante universelle de $\mathcal{G}$.

Si désormais $G = SL_2$ et si (E, F, H) désigne la base "standard" de $\mathcal{G}$, la variante entière du théorème de Poincaré-Brikhoff-Witt implique que tout $U^{(m)}(\mathcal{G})$ est engendré sur k par les éléments de la forme[5]

$$E^{[a]}.(E^{[p^m]})^{a'} \left(\begin{array}{c} H \\ b \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} H \\ p^m \end{array} \right)^{b'} F^{[c]}.(F^{[p^m]})^{c'}$$

avec $a, b, c \in [0, p^m - 1]$, $a', b', c' \in \mathbb{N}$ (et $a!.E^{[a]} = E^a$, $b!. \left(\begin{array}{c} H \\ b \end{array} \right) := H(H-1)...(H-b+1)$, $c!.F^{[c]} = F^c$). Quand $m \to +\infty$, on retrouve bien sûr la base "usuelle" sur k de $U(\mathcal{G}) = \mathrm{Dist}\,(G)$.

2 Scindage du Frobenius

2.1 La norme et ses propriétés

La "norme" Δ_T (au sens de [6], 6.) de l'algèbre de Lie $\mathcal{T}$ du tore des matrices diagonales de G est un élément de $U(\mathcal{T})$ qui peut se caractériser (à un facteur non nul près) par des propriétés intrinsèques (on renvoie à *loc. cit.* pour les raisons de son introduction). Nous n'aurons besoin que de sa description explicite et prendrons donc comme définition ([6], 6.3 Lemma) :

$$\Delta_T := \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i \left(\begin{array}{c} H \\ i \end{array} \right) \in U(\mathcal{T}) \subset U(\mathcal{G})$$

Parmi les raisons de la terminologie "norme", on a évidemment la propriété, dans $U(\mathcal{T}) \subset U(\mathcal{G})$:

$$\Delta_T^2 = \Delta_T.$$

Pour la clarté des calculs à venir, il est également commode d'introduire, pour $l, i \in \mathbb{Z}$, les notations :

$$\left(\begin{array}{c} H+l \\ i \end{array} \right) := \frac{(H+l).(H+l-1)...(H+l-1)}{i!}$$

$$\left(\begin{array}{c} l \\ q \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} H \\ q \end{array} \right) |_{H=l}$$ (pour $l \geq 0$, c'est bien le coefficient binomial usuel) et

$$\Delta_{T,n} := \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i \left(\begin{array}{c} H-2n \\ i \end{array} \right) \in U(\mathcal{G})$$

Proposition 2.1.1. Soient $l \in \mathbb{Z}$. On a, pour tout $r \in \mathbb{N}$, l'égalité

$$\left(\begin{array}{c} H+l \\ r \end{array} \right) = \sum_{s+q=r, s\geq 0, q\geq 0} \left(\begin{array}{c} l \\ q \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} H \\ s \end{array} \right) \in U(\mathcal{G}).$$

Démonstration. On détermine les coefficients de $\left(\begin{array}{c} H+l \\ r \end{array} \right)$ dans la base des $(\left(\begin{array}{c} H \\ s \end{array} \right))_{s\geq 0}$ en faisant successivement $H = 0, H = 1, ...$

Cette égalité est en fait valide dans $\mathbb{Z}[(\left(\begin{array}{c} H \\ s \end{array} \right))_{s\geq 0}]$ et posant $H = H' + m$, on en déduit le

Corollaire 2.1.2. Soient $l \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{Z}$. On a, pour tout $r \in \mathbb{N}$, l'égalité

$$\left(\begin{array}{c} H+l+m \\ r \end{array} \right) = \sum_{s+q=r, s\geq 0, q\geq 0} \left(\begin{array}{c} l \\ q \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} H+m \\ s \end{array} \right).$$

[5]Pour le lecteur non familier avec le yoga des puissances divisées partielles, la formule (2.2.5.1) de [1] explique pourquoi les puissances divisées partielles n'apparaissent pas ici bien qu'elles soient sous-jacentes.

Corollaire 2.1.3[6]. On a $\Delta_T = \begin{pmatrix} H-1 \\ p-1 \end{pmatrix} = 1 + \frac{H^{p-1}}{(p-1)!} = 1 - H^{p-1}$. En particulier, $\Delta_T(H) = \Delta_T(aH)$ pour tout $a \in [0, ..., p-1]$. Plus généralement, on a : $\Delta_{T,n} = \begin{pmatrix} H-2n-1 \\ p-1 \end{pmatrix} \in U(\mathcal{G})$

Démonstration. Si $l = -1$ et $r = p-1$, la proposition 2.1.1 donne bien que $\Delta_T = \begin{pmatrix} H-1 \\ p-1 \end{pmatrix}$. L'égalité $\begin{pmatrix} H-1 \\ p-1 \end{pmatrix} = 1 + \frac{H^{p-1}}{(p-1)!}$ découle du développement explicite du premier membre. Le reste est immédiat.

Corollaire 2.1.4. On a, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\Delta_{T,n}^2 = \Delta_{T,n}$.

Corollaire 2.1.5. L'élément $\Delta_{T,n} \in U(\mathcal{G})$ ne dépend que de la classe modulo p de n.

Proposition 2.1.6. On a, pour tout $n \geq 0$ et tout $m \in \mathbb{Z}$, les égalités

$E^{[n]}.\Delta_{T,m} = \Delta_{T,m+n}.E^{[n]}$

$F^{[n]}.\Delta_{T,m} = \Delta_{T,m-n}.F^{[n]}$

Démonstration. cf. [6], 6.4 Corollary ii).

Corollaire 2.1.7. On a : $[E^{[np]}, \Delta_T] = [F^{[np]}, \Delta_T] = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 2.1.8. Si p ne divise pas j, on a, pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $\Delta_{T,n}.\begin{pmatrix} H-2n \\ j \end{pmatrix} = 0$ sauf si j est un multiple de p.

Démonstration. On utilise que $\Delta_{T,n} = \begin{pmatrix} H-2n-1 \\ p-1 \end{pmatrix}$ et l'on détermine, comme pour la proposition 2.1.1, les coordonnées de $\Delta_{T,n}.\begin{pmatrix} H-2n \\ j \end{pmatrix}$ dans la base $(\begin{pmatrix} H \\ i \end{pmatrix})_{i\geq 0}$ en faisant successivement $H = 0$, $H = 1$,.... .

2.2 Le scindage

Tout d'abord, rappelons que l' on dispose du morphisme de Frobenius $Fr : U(\mathcal{G}) \to U(\mathcal{G})$ (qui est le tranposé du morphisme de Frobenius usuel sur G) défini sur les générateurs par :

$Fr(E^{[n]}) = E^{[n/p]}$, $Fr(F^{[n]}) = F^{[n/p]}$

pour n divisible par p et 0 sinon. C'est un morphisme d' algèbres.

On va définir, pour tout $m \geq 0$ un morphisme d'algèbres $\varphi_m : U^{(m)}(\mathcal{G}) \to U^{(m+1)}(\mathcal{G})$ qui sera induit par :

$\varphi(E^{[i]}) = E^{[ip]}.\Delta_T$, $\varphi(F^{[i]}) = F^{[ip]}.\Delta_T$, $\varphi(\begin{pmatrix} H \\ i \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} H \\ ip \end{pmatrix}.\Delta_T$

avec $i \in \mathbb{N}$ (d'après le corollaire 2.1.7, on peut tout aussi bien multiplier à gauche ou à droite par Δ_T). Cette application scindera de manière évidente l'application Fr. On a

[6] Je remercie X. Caruso de m'avoir signalé la formulation du corollaire suivant.

Proposition 2.2.1. L'application $\varphi_m : U^{(m)}(\mathcal{G}) \to U^{(m+1)}(\mathcal{G})$ est bien définie et est un morphisme (non unifère) d' algèbres.

Démonstration. On va simplement définir un morphisme $\varphi : U(\mathcal{G}) \to U(\mathcal{G})$ et laisser au lecteur le soin de vérifier qu' il se raffine en des morphismes φ_m ; en effet, formellement tout élément de $U^{(m)}(\mathcal{G})$ est multiple[7] d' éléments de $U(\mathcal{G})$ et si l'on sait définir φ on sait définir φ_m. On évite ainsi le recours aux notations des puissances divisées partielles qui ne jouent à cet endroit aucun rôle. L'application φ est la composée de l'application $Fr' : U(\mathcal{G}) \to U(\mathcal{G})$ ($Fr'(E^{[i]}) = E^{[ip]}$, $Fr'(F^{[i]}) = F^{[ip]}$, $Fr'(\begin{pmatrix} H \\ i \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} H \\ ip \end{pmatrix}$ apparaissant dans la théorie du "scindage de Frobenius" (voir [12] 2. pour une présentation et [11]) et de la multiplication par Δ_T. Comme la restriction de l' application Fr' à $U(\mathcal{B}^+)$ ou bien à $U(\mathcal{B}^-)$ (avec $\mathcal{B}^+$ resp. $\mathcal{B}^-$ l'algèbre de Lie du sous-groupe des matrices triangulaires supérieures, resp. triangulaires inférieures de G) est un morphisme d'algèbres, c'est *a fortiori* le cas après multiplication par Δ_T car $\Delta_T^2 = \Delta_T$ et d' après le coroollaire 2.1.7. Il ne reste donc à vérifier que φ (définie comme ci-dessus sur les générateurs de $U(\mathcal{G})$) est compatible avec la relation (cf. [7], 26.2 Lemma) :

$$E^{[b]}F^{[a]} - F^{[a]}E^{[b]} = \sum_{r=1}^{\min(a,b)} F^{[a-r]} \begin{pmatrix} H-a-b+2r \\ r \end{pmatrix} E^{[c-r]}$$

On est donc amené à considérer :

$$(E^{[pb]}F^{[pa]} - F^{[pa]}E^{[pb]}).\Delta_T = (\sum_{r=1}^{\min(pa,pb)} F^{[pa-r]} \begin{pmatrix} H-pa-pb+2r \\ r \end{pmatrix} E^{[pb-r]}).\Delta_T$$

La proposition 2.1.6 donne $E^{[pb-r]}.\Delta_T = \Delta_{T,pb-r}.E^{[pb-r]}$ et pour démontrer la proposition, il suffit donc de prouver que :

$$\begin{pmatrix} H-pa-pb+2r \\ r \end{pmatrix}.\Delta_{T,pb-r} = \varphi(\begin{pmatrix} H-a-b+2r' \\ r' \end{pmatrix}) \text{ si } r = r'p \text{ et}$$

$$\begin{pmatrix} H-pa-pb+2r \\ r \end{pmatrix}.\Delta_{T,pb-r} = 0 \text{ si } r \text{ n' est pas divisible par } p$$

Prouvons la première égalité :

on a $\Delta_{T,pb-r} = \Delta_T$ si $r = r'p$, d' après le corollaire 2.1.5. Il suffit donc de prouver que

$$\begin{pmatrix} H-pa-pb+2r \\ r \end{pmatrix}.\Delta_T = \varphi(\begin{pmatrix} H-a-b+2r' \\ r' \end{pmatrix}$$

et donc que :

$$Fr'(\begin{pmatrix} H-a-b+2r' \\ r' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H-pa-pb+2r \\ pr' \end{pmatrix}.$$

Pour calculer le membre de gauche, on écrit, grâce à la proposition 2.1.1, $\begin{pmatrix} H-a-b+2r' \\ r' \end{pmatrix} = \sum_{q+s=r',q\geq 0,s\geq 0} \begin{pmatrix} -a-b+2r' \\ q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H \\ s \end{pmatrix}$ dans la base des $\begin{pmatrix} H \\ j \end{pmatrix}$, puis on applique Fr'. Pour le membre de droite, on applique la même proposition et l' on remarque que les $\begin{pmatrix} m \\ j \end{pmatrix}$ vérifient les congruences usuelles : $\begin{pmatrix} pm \\ j \end{pmatrix} \equiv 0 \bmod p$ sauf si j est un multiple de p et on a $\begin{pmatrix} pm \\ j \end{pmatrix} \equiv$

[7] cf. l'analogue de la formule (2.2.5.1) de [1].

$\begin{pmatrix} m \\ j' \end{pmatrix}$ mod p si $j = pj'$ (comme conséquence immédiate des "congruences de Lucas" : si $n = n_dp^d + ... + n_1p + n_0$ avec $0 \leq n_i < p$, $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} n_d \\ m_d \end{pmatrix} .... \begin{pmatrix} n_0 \\ m_0 \end{pmatrix}$ mod p.)

Prouvons maintenant la deuxième égalité :

on a (coroll. 2.1.5) $\Delta_{T,pb-r} = \Delta_{T,-r}$ et l' on a (Prop. 2.1.1)

$$\begin{pmatrix} H - pa - pb + 2r \\ r \end{pmatrix} = \sum_{s+q=r, s\geq 0, q\geq 0} \begin{pmatrix} -pa - pb \\ q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H + 2r \\ s \end{pmatrix}.$$

Si l'on multiplie à droite par $\Delta_{T,-r}$, on déduit de la proposition 2.1.8 que les termes de la comninaison linéaire que l' on obtient avec s non divisible par p sont nuls, d' autre part, si s est divisible par p, q ne peut l' être (sinon $s+q=r$ le serait) et dans ce cas $\begin{pmatrix} -pa - pb \\ q \end{pmatrix} \equiv 0 \bmod p$.

Remarque 2.2.2. Une partie seulement (modelée sur [5], Prop. 2.5.3 (3)) de ces calculs s'étend à des situations relevées (c'est à dire modulo p^2,...) ou à l'algèbre enveloppante quantique en une racine de l'unité.

3 Compatibilités

Avec les descriptions données en 1., il est évident que l' application canonique $\rho : U(\mathcal{G}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{D}_X)$ induit des applications $\rho_m : U^{(m)}(\mathcal{G}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{D}_X^{(m)})$ et l'on va établir la compatibilité entre celles-ci et les deux applications $Fr : U^{(m+1)}(\mathcal{G}) \rightarrow U^{(m)}(\mathcal{G})$et $\varphi_m : U^{(m)}(\mathcal{G}) \rightarrow U^{(m+1)}(\mathcal{G})$.

3.1 Compatibilité avec l'application canonique de Berthelot

L'application en question est celle définie dans [3], 2.1.7 , [2], 2.2.4 : $can : \mathcal{D}_X^{(m+1)} \rightarrow F^*\mathcal{D}_{X'}^{(m)}$. Elle envoie, avec les notations de *loc. cit.*, $\partial^{<l>_{m+1}}$ sur $1 \otimes \partial'^{<l/p>_m}$ (avec la convention usuelle). On a alors la :

Proposition 3.1.1. Le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} U^{(m)}(\mathcal{G}) \arrow[d, "1\otimes\rho_m"'] & U^{(m+1)}(\mathcal{G}) \arrow[l, "Fr"'] \arrow[d, "\rho_{m+1}"] \\ H^0(X, F^*\mathcal{D}_{X'}^{(m)}) & H^0(X, \mathcal{D}_X^{(m+1)}) \arrow[l, "can"] \end{tikzcd}$$

Démonstration. Pour vérifier cette commutativité, il suffit de restreindre l' image par ρ_{m+1} des éléments de $U^{(m+1)}(\mathcal{G})$ à une des deux copies de $\mathbb{A}^1$ formant le recouvrement standard de X : $X = \mathbb{A}^1 \cup \mathbb{A}^1 = \text{Spec}\,(k[t]) \cup \text{Spec}\,(k[t'])$ car $H^0(X, \mathcal{D}_X^{(m)}) \hookrightarrow H^0(\mathbb{A}^1, \mathcal{D}_{\mathbb{A}^1}^{(m)})$. On peut donc supposer, avec les notations évidentes, que $E^{<n>_{m+1}}$ s' envoie sur $\partial_t^{<n>_{m+1}}$ (ou en passant à l' autre $\mathbb{A}^1$ que $F^{<n>_{m+1}}$ s' envoie sur $\partial_{t'}^{<n>_{m+1}}$). La commutativité est alors immédiate. Comme ces éléments engendrent l'algèbre $U^{(m)}(\mathcal{G})$, cela suffit.

Remarque 3.1.2. On remarquera que $\rho_{m+1}(\begin{pmatrix} H \\ j \end{pmatrix}_{m+1})$ est combinaison linéaire de $t^l\partial^{<l>_{m+1}}$ et que lorsque $l = pl'$, on a $can(t^l\partial^{<l>_{m+1}}) = t^l(1 \otimes \partial'^{<l'>_m}) = 1 \otimes t^{l'}\partial'^{<l'>_m}$.

3.2 Compatibilité avec l'application définie par Garnier

D'autre part, dans [5], 2.4, Garnier a introduit, pour $m > 0$, un opérateur différentiel d' ordre $p-1$ [8] (opérateur de Dwork) $\mathcal{H} \in \mathcal{D}_X^{(m)}$ pour tout schéma lisse X sur k réalisant la descente par Frobenius pour les $\mathcal{D}$-modules. Pour $X = \mathbb{P}^1_k (= X')$, cet opérateur s'étend en fait une section globale[9] de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ (avec $m > 0$) sur X et l' on a tout simplement :

Proposition 3.2.1. On a $\rho_m(\Delta_T) = \mathcal{H}$ dans $H^0(X, \mathcal{D}_X^{(m)})$ pour tout $m > 0$.

Démonstration. Soit t une uniformisante locale sur X au voisinage de ∞. On sait alors que $\mathcal{H} = \sum_{r=0}^{p-1} t^r \partial_t^{[r]}$. D'autre part, on a $\rho_m(H) = 2t\partial_t$ et l'on vérifie immédiatement par récurrence que $\binom{t\partial_t}{r} = t^r \partial_t^{[r]}$. Le corollaire 2.1.3 permet alors de conclure.

De plus, dans [5], 4.3 et 4.4 est décrit un morphisme de $O_{X'}$-algèbres $\mathcal{D}_{X'} \to F_*\mathcal{D}_X$ canonique (ie. indépendant du choix de coordonnées) lequel induit donc un morphisme $P \in H^0(X, \mathcal{D}_X^{(m)}) \to P' \in H^0(X, \mathcal{D}_X^{(m+1)})$ tel que $F'^*(P.f) = P'.(F'^* f)$ pour toute section $f \in O_{X'}$. Le lecteur prendra garde que, si t désigne une coordonnée locale sur X', contrairement à l'inclination naturelle, $(1)' = \mathcal{H}\,(\neq 1)$, $(\partial_t)' = \sum_{r=0}^{p-1} (-t)^r \binom{p+r}{p} \partial_t^{[p+r]}\,(\neq \partial_t^{[p]})$.

Proposition 3.2.2. Le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
U^{(m)}(\mathcal{G}) \arrow[r, "\varphi_m"] \arrow[d, "\rho_m"'] & U^{(m+1)}(\mathcal{G}) \arrow[d, "\rho_{m+1}"] \\
H^0(X, \mathcal{D}_X^{(m)}) \arrow[r, "P \to P'"'] & H^0(X, \mathcal{D}_X^{(m+1)})
\end{tikzcd}$$

Démonstration. On effectue la même réduction à un calcul local que pour la proposition 3.1.1 et la proposition découle alors immédiatement des deux égalités (la première est un cas particulier de [5], Prop. 4.6.2 (4), la seconde se vérifie par un calcul explicite) :

$$(\partial_t^{[n]})' = \sum_{r=0}^{p-1} (-t)^r \binom{np+r}{np} \partial_t^{[np+r]}$$

$$(\partial_t^{[np]}).\mathcal{H} = \sum_{r=0}^{p-1} (-t)^r \binom{np+r}{np} \partial_t^{[np+r]}$$

3.3 Descente des $U^{(m)}(\mathcal{G})$-modules

J'ignore pour l'instant si l'on peut formuler un énoncé général de descente pour ceux-ci. On peut toutefois essayer de s'inspirer de la Prop. 3.3.1 de [5] et, partant d' un $U^{(m+1)}(\mathcal{G})$-module M_{m+1}, considérer $\mathrm{Im}\,(M_{m+1} \xrightarrow{m \to \Delta_T m} M_{m+1})$.

Dans le cas du module de Verma infinitésimal $M_{m+1} := Z_{m+1}(-2)$ (dont la localisation, au sens de [4], correspond à la cohomologie à support en point à l'infini de X du faisceau structural O_X), cette image s'identifie exactement aux éléments sur lesquels E, F, H agissent trivialement comme il résulte de la description explicite de celui-ci (que l'on déduit immédiatement de [13], 1.2). Une étude similaire à celle introduite dans ce travail devrait également tenir compte de la p-filtration sur $\mathcal{D}_X$ et des théories de localisation correspondantes (cf. [8]). Nous reviendrons sur ces questions

[8] Cet opérateur est défini de manière intrinsèque, ie. sans aucun choix de coordonnées, et donc "canonique".

[9] La question de savoir si tel est le cas pour toute variété de drapeaux semble intéressante.

ultérieurement.

Remarque 3.3.1. En ce qui concerne le cas d' un groupe réductif G plus général, remarquons que l' on a une injection $U^{(m)}(\mathcal{G}) \hookrightarrow H^0(G, \mathcal{D}_G^{(m)})$ dont l' image consiste en les opérateurs différentiels invariants. Comme C. Noot-Huyghe me l' a fait remarquer, si l' on savait que les constructions de [5] sont G-équivariantes (par exemple au sens de [9]), on en déduirait certainement l' existence de φ_m pour ces G. En ce qui concerne l' explicitation de ce dernier par les techniques de [5], il est néanmoins à noter que si l' on veut travailler en écrivant $SL_2 = \mathrm{Spec}\,(k[a,b,c,d]/(ad-bc-1))$, la section Δ_T a une expression nettement plus compliquée (déduite de $H \to a\partial_a - b\partial_b + c\partial_c - d\partial_d$) que les expressions apparaissant ci-dessus.

Références

[1] Berthelot, P. : *D-modules arithmétiques I. Opérateurs différentiels de niveau fini.* Ann. scient. Ec. Norm. Sup., t. 29, p. 185-272 (1996).

[2] Berthelot, P. : *D-modules arithmétiques II. Descente par Frobenius.* Mémoires de la SMF no. 81 (2000).

[3] Berthelot, P. : *Introduction à la théorie arithmétique des D-modules.* Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques II, p. 1-80. Astrisque No. 279 (2002).

[4] Bezrukavnikov, R. ; Mirković, I. ; Rumynin, D. : *Localization of modules for a semisimple Lie algebra in prime characteristic, with an appendix by S. Riche.* Preprint math. RT/0205144. Ann. of Math. (à paraitre).

[5] Garnier, L. : *Descente par Frobenius explicite pour les $\mathcal{D}^\dagger$-modules* . Journal of Algebra 205, p. 542-577 (1998).

[6] Haboush, W. J. : *Central differential operators on split semisimple groups over fields of positive characteristic.* Lecture Notes in Math. 795, p. 35-85 (1980).

[7] Humphreys, J.E. : *Introduction to Lie algebras and representation Theory.* Graduate Texts in Math., vol. 9. Springer -Verlag (1970).

[8] Hashimoto, Y. ; Kaneda, M. ; Rumynin, D. : *On localization of $\overline{D}$-modules.* Representations of algebraic groups, quantum groups, and Lie algebras. AMS Contemp. Math., vol. 413, p. 43-62 (2006).

[9] Kaneda, M. ; Ye, J. : *Equivariant localization of $\overline{D}$-modules on the flag variety of the symplectic group of degree 4.* Journ. of Algebra, vol. 309, n. 1, p. 236-281 (2007).

[10] Kashiwara, M. : *Representation theory and D-modules on flag varieties.* Astérisque 173-174, p. 55-109 (1989).

[11] Kumar, S. ; Littelmann, P. : *Algebraization of Frobenius splitting via quantum groups.* Ann. of Math. vol. 155 (2), p. 491-551 (2002).

[12] Kumar, S. ; Littelmann, P. : *Frobenius splitting in characteristic zero and the quantum Frobenius map.* J. Pure Appl. Algebra 152, p. 201-216 (2000).

[13] Mowbray, M. : *The submodules structure of characteristic p Verma modules for groups of type A_1.* Communications in Algebra 17(6), p. 1407-1423 (1989).